数理解析研究所講究録
17巻 1966年 1-34

補間法・数値積分・函数近似

立教大 理　一松　信

目　次

はしがき

補間法、数値積分、函数近似は、いずれも広い意味で函数計算、近似理論の範囲の話題である。これらは数値計算法のうちでも古典的な話題であるが、それでも近年になつて考案された工夫もないではない。

このセミナーでは、入門第一歩として、基本的、標準的な手法を主とした。欲をいえば級数求和法、反復計算の加速法、商差法、さらに多変数の多項式近似、有理函数近似など、加えたい話題はいくつもあるが、分量の点も考慮して、一応これだけの範囲でまとめてみた。

１９６６年５月

I. 補間法

1.1. Lagrange の補間式

補間法とは、有限個の点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ において、与えられた値をとる多項式 $P(x)$ を求める技法である。 $P(x)$ をたかだか n 次とすれば、このような多項式（これを Lagrange の補間多項式という）はただ一つ存在する。

$$P(x_k) = y_k , \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

とすれば、$P(x)$ は、

$$(1) \qquad P(x) := \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^{n} \frac{x - x_m}{x_k - x_m} = L(x) \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{(x - x_k) L'(x_k)}$$

$$(2) \qquad L(x) := (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$$

で表わされる（ := は右辺によつて左辺を定義する意味）。

C^{n+1} 級の函数 $f(x)$ があり、

$$y_k := f(x_k)\ ,\quad (k = 0,1,\dots,n)$$

のとき、補間多項式 (1) の誤差は

$$(3)\qquad f(x) - P(x) = \frac{1}{(n+1)!} L(x) f^{(n+1)}(\xi)$$

(ξ は $x_0, x_1, \dots, x_n$ を含む最小の区間内のある点) で与えられる。したがつて $f(x)$ が C^∞ 級で、 $|f^{(n)}|$ が (n によらず) 一様に有界であるとき、

$$x_0 = 0,\quad x_1 = h,\quad x_2 = -h,\quad x_3 = 2h,$$
$$x_4 = -2h, \dots,\ x_{2n-2} = -(n-1)h,\quad x_{2n-1} = nh$$

として (2n-1) 次多項式で補間すると、 $|h| \leqq 2$ ならば、補間多項式の列は、$n \to \infty$ のとき $f(x)$に一様収束する。ただし区間 $[a,b]$ を n 等分した分点においてn 次の補間多項式を作つたのでは、必らずしも $n \to \infty$ のとき、その補間多項式列は $f(x)$ に収束しない。

反例 $[0,1]$ において $f(x) = |x - (1/2)|$ (Runge).

注 補間でなく近似であれば、たとえば $[0,1]$ で連続な函数 $f(x)$ に対して分点の値に重みをつけて加えた

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

の列は $n \to \infty$ のとき一様に $f(x)$に収束する (S. Bernstein). これによつて Weierstrassの多項式近似定理の一つの証明が可能である。

1.2. 補間多項式の計算法

前項のLagrange の補間多項式を求めるのには、実用上便利な計算手法がある。この計算法でとくに強調すべきは、$x_0, x_1, x_2, \dots$ はどういう順序に並んでいてもよいことで、したがつて函数表を補間するには、x に近い分点から順次 $x_0, x_1,$

$x_2, \cdots$ととつてゆくとよい。また逆補間は、y_k において値 x_k をとる函数に対する補間多項式という考え方で、この方法が適用できる。

$N := \{0,1,\ldots,n\}$ とし、N の部分集合 S に対して、S の要素の数を $|S|$ と書き、$\{x_k | k \in S\}$ に対する $|S|-1$ 次補間多項式を $P_S(x)$ とする（便宜上 $P_\phi = 0$ とする）。このとき

補題 1.1　　$A \subset N$;　$i, j \notin A$ $(i \neq j)$;　$S = A \cup \{i\}$, $T = A \cup \{j\}$ とする。このとき

$$P_{S \cup T}(x) = \frac{(x_i - x)P_T(x) + (x_j - x)P_S(x)}{(x_i - x_j)} \tag{4}$$

である。

証明　$|S| = |T| = |A|+1$,　$|S \cup T| = |A|+2$ であり、(4) の右辺は $|S| = |S \cup T|-1$ 次多項式である。ゆえに $x = x_k$, $(k \in S \cup T)$ において (4) の両辺の値が一致すればよい。この性質は $k=i$, $k=j$, $k \in A$ のそれぞれの場合について、容易に検証できる。

補題 1.2　Aitken の算法　y_k, $(k=0,1,\ldots,n)$ に対して

$$p_{k,0}(x) = y_k, \qquad (k = 0,1,\ldots,n)$$

$$p_{k,j+1}(x) = \frac{(x_k - x)p_{j,j}(x) - (x_j - x)p_{k,j}(x)}{x_k - x_j}, \qquad (k \geqq j+1)$$

によつて、$p_{0,0}$, $p_{1,0}$, $p_{1,1}$, $p_{2,0}$, $p_{2,1}$, $p_{2,2}, \ldots, p_{n,0}$, $p_{n,1}, \ldots, p_{n,n}$ の順に作つてゆくと

$$P(x) = P_N(x) = p_{n,n}(x).$$

証明　補題 1.1 により、　$S = \{0,1,\ldots,j-1,j\}$,　$T = \{0,1,\ldots,j-1,k\}$

として、

$$p_{k,j}(x) = P_{\{0,1,\ldots,j-1,k\}}, \quad (j = 0,1,\ldots,n;\ k \geqq j)$$

が証明される。したがつてとくに $p_{n,n}(x) = P_{\{0,1,\ldots,n\}}(x)$.

補題 1.3 Neville の算法　同じ条件の下で

$$q_{k,0}(x) = y_k, \quad (k = 0,1,\ldots,n)$$

$$q_{k,j+1}(x) = \frac{(x_k-x)q_{k-1,j}(x) - (x_{k-j-1}-x)q_{k,j}(x)}{x_k - x_{k-j-1}}, \quad (k \geqq j+1)$$

により、 $q_{0,0}, q_{1,0}, q_{1,1}, q_{2,0}, q_{2,1}, q_{2,2}, \ldots, q_{n,0}, \ldots, q_{n,n}$ の順に作つてゆくと

$$P(x) = P_N(x) = p_{n,n}(x).$$

証明　補題 1.1 により、上とまつたく同様に

$$q_{k,j}(x) = P_{\{k-j,k-j+1,\ldots,k\}}, \quad (j = 0,1,\ldots,n;\ k \geqq j)$$

が証明され、 $q_{n,n}(x) = P_{\{0,1,\ldots,n\}}(x)$ となる。

注 Aikten の方法では、$p_{k,j}$ を計算するのに、$p_{k,j-1}$ と $p_{j-1,j-1}$ が使われる。これに対してNevilleの方法では、$p_{k,j}$ を求めるのに、すぐ近くにある $p_{k,j-1}$ と $p_{k-1,j-1}$ が使われるので都合がよい。

演習問題 1.1　次の表から、逆補間で $J_0(x)$ の（第2の）零点の近似値を求めよ。

x	5.2	5.4	5.6	5.8
$J_0(x)$	-0.1102904	-0.0412101	0.0269709	0.0917026

演習問題 1.2

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}, \quad (n = 1,2,3,\ldots)$$

に対する補間多項式を作り、その $f(0)$ の値から無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ の近似値を求めよ。（正しい答と比較もしてみよ）

1.3. 等間隔補間

$x_0, x_1, \ldots$ が等間隔で

$$x_k = x_0 + hk, \quad (k = 0,1,2,\ldots)$$

である場合には、補間多項式は 1.2 の特別な場合とするよりも、差分表によつて求めるのが便利である。差分は、刻み幅 h を定めたとき、

(5) $$\Delta^1 f(x) = \Delta f(x) := f(x+h) - f(x), \quad \Delta^0 f(x) := f(x),$$

$$\Delta^k f(x) := \Delta(\Delta^{k-1} f(x)), \quad (k = 1,2,\ldots)$$

によつて順次定義される。書き下せば

(6) $$\Delta^k f(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} f(x+(k-j)h)$$

である。 $\Delta^k f(x_n)$ を $\Delta^k y_n$ とも書く。

変数をかえて $s = \frac{x-x_0}{h}$ とし、

$$\binom{s}{n} := \frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-n+1)}{n!}$$

とおけば、これは n 次多項式で、h=1 とした差分は

$$\Delta^k \binom{s}{n} = \binom{s}{n-k}$$

となる。さて整数列 m_k を、 $m_{k+1}=m_k$ または m_k-1 であるように与える。変数 s について、

$$S_k := \{m_k,\ m_k+1,\ \ldots\ ,\ m_k+k\}$$

に対するk次補間多項式を

(7) $$P_k(s) = A_0 + A_1\binom{s+a_1}{1} + \cdots + A_k\binom{s+a_k}{k}$$

であるように作ることを考えよう。もちろんkを固定すれば、このような表示はつねにできるが、ここで $A_0, A_1, \ldots$ がkに依存しない定数になるように $a_1, \ldots$ $a_k, \ldots$ をうまく定めたいのである。

もしこれが可能とすれば、$S_k \subset S_{k+1}$ だから、

(8) $$A_{k+1}\binom{s+a_{k+1}}{k+1} = P_{k+1}(s) - P_k(s) = 0, \quad (s \in S_k)$$

である。$P_{k+1}(s)$ が真に $(k+1)$ 次ならば、$A_{k+1} \neq 0$ であり、(8) の左辺の零点 $-a_{k+1}, -a_{k+1}+1, \ldots, -a_{k+1}+k$ が S_k に含まれるから、

(9) $$a_{k+1} = -m_k, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

でなければならない。逆に (9) のように a_k を定めると、

$$\Delta^j P_k(s) = A_j + A_{j+1}\binom{s-m_j}{1} + \cdots + A_k\binom{s-m_{k-1}}{k-j}$$

ここで $s=m_j$ とすれば、右辺の2項目以下は0となり、

$$A_j = \Delta^j y_{m_j},$$

けっきょく

(7') $$P_k(s) = \sum_{j=0}^{k} \Delta^j y_{m_j}\binom{s-m_{j-1}}{j} = P_{k-1}(s) + \Delta^k y_{m_k}\binom{s-m_{k-1}}{k}$$

となる。以上は必要条件として求めたが、逆に (7') が所要の補間多項式であることは、すぐに証明できる。(7') による誤差は、$f(x)$ が C^{k+1} 級のとき

$$f(x_0+sh) = P_k(s) + h^{k+1}f^{(k+1)}(\xi)\binom{s-m_k}{k+1},$$

$$x_{m_k} < \xi < x_{m_k+k} \;;\quad x = x_0 + sh$$

で与えられる。

例 (i) $m_k = 0$, $(k = 0,1,\ldots)$ のときには

$$P_n(s) = \sum_{j=0}^{n}\binom{s}{j}\Delta^j y_0 \qquad \text{(Newton の前進公式)}$$

(ii) $m_k = -k$, $(k = 0,1,\ldots)$ のときには

$$P_n(s) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{-s}{j}\Delta^j y_{-j} \qquad \text{(Newtonの後退公式)}$$

(iii) $m_{2k} = m_{2k+1} = -k$, $(k=0,1,..)$のときには

$$P_n(s) = y_0 + \binom{s}{1}\Delta y_0 + \binom{s}{2}\Delta^2 y_{-1} + \binom{s+1}{3}\Delta^3 y_{-1} + \binom{s+1}{4}\Delta^4 y_{-2}$$

$$+ \ldots \qquad \text{(Gauss の前進公式)}$$

(iv) $m_{2k} = m_{2k-1} = -k$, $(k=0,1,..)$のときには

$$P_n(s) = y_0 + \binom{s}{1}\Delta y_{-1} + \binom{s+1}{2}\Delta^2 y_{-1} + \binom{s+1}{3}\Delta^3 y_{-2}$$

$$+ \binom{s+2}{4}\Delta^4 y_{-2} + \ldots \qquad \text{(Gauss の後退公式)}$$

n が偶数 $2k$ のときには、Gauss の前進、後退両公式は、同じ $S = \{-k,-k+1,\ldots,-1,0,1,..,k-1,k\}$ で補間しているので、同じ公式である。ゆえに両者の相加平均を作る。これを中心差分

$$\delta f(x) := f(x+\frac{h}{2}) - f(x-\frac{h}{2})$$

で表わしたものが Stirling の公式である。

またnが奇数 $2k+1$ のときには、0における Gauss の前進公式と、1における Gauss の後退公式とは、ともに同じ $S' = \{-k,-k+1,\dots,-1,0,1,\dots,k,k+1\}$ で補間していて、同じ公式である。両者の相加平均を作り、これを中心差分で表現したものが Bessel の公式である。Besselの公式は分点の中央あたりの値を計算するのに適している。

1.4. Everett の公式とくりこみ

n が奇数 $2k+1$ のときの Gauss の前進公式を変形する。定義から、中心差分によつて

$$\Delta^{2j} y_{-j} = \delta^{2j} y_0$$

である。奇数次の差分は一つ手前の偶数次の差分の差として表わし、

$$\Delta^{2j+1} y_{-j} = \Delta^{2j} y_{-j+1} - \Delta^{2j} y_{-j} = \delta^{2j} y_1 - \delta^{2j} y_0$$

を代入すると、

$$P_{2k+1}(s) = \sum_{j=0}^{k} \binom{s+j-1}{2j} \delta^{2j} y_0 + \sum_{j=0}^{k} \binom{s+j}{2j+1} [\delta^{2j} y_1 - \delta^{2j} y_0]$$

ここで $t:=1-s$ とおけば

$$\binom{s+j-1}{2j} - \binom{s+j}{2j+1} = \binom{s+j-1}{2j}\left[1 - \frac{s+j}{2j+1}\right]$$

$$= \frac{(j-t)(j-t-1)\dots(-j-t+1)(j+t)}{(2j+1)!}$$

$$= \frac{(j+t)(j+t-1)\dots(t-j)}{(2j+1)!} = \binom{t+j}{2j+1}$$

であるから、まとめて

$$(10)\quad P_{2k+1}(s) = \sum_{j=0}^{k} \binom{t+j}{2j+1} \delta^{2j} y_0 + \sum_{j=0}^{k} \binom{s+j}{2j+1} \delta^{2j} y_1,$$

$$t := 1 - s$$

という対称な形をうる。これを Everettの公式という。ここに現われている $\binom{s+j}{2j+1}$ は $\{-j, -j+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, j\}$ 上での Lagrangeの補間多項式であり、1.1で扱かつたものである。

さて、近年は電子計算機の発展により、函数値も高精度の計算がされるようになつたが、1次式（線型補間、比例部分）ですむようにすると、刻み幅をものすごく細かくしなければならず、実用的でない。刻み幅はある程度大きくとり、高次の補間多項式で補間するのが普通になつてきた。しかしむやみに次数をあげても、計算の手間もさることながら、丸めの誤差や $f^{(n)}$ の性状による公式誤差が影響して、かえつて精度がおちる。普通には5次程度で十分なように刻み幅をとる。Everett の5次の公式は、2つの部分からなるが、tのほうは

$$ty_0 + \binom{t+1}{3}[\delta^2 y_0 + \frac{(t+2)(t-2)}{4\cdot 5}\delta^4 y_0]$$

である。（sのほうは $t \to s$, $y_0 \to y_1$ とすればよい。）tは $0 \leq t \leq 1$ を動くが、このとき $\delta^4 y_0$ にかかつている函数 $\frac{t^2-4}{20}$ は $-\frac{4}{20}$ と $-\frac{3}{20}$ の間を動くだけで、しかも $\delta^4 y_0$ は比較的小さいから、実質的に定数とみなしてもさしつかえない。そこでこの項を定数 $-c$ とみなすと、補間公式は、事実上3次の公式と同じ形

(11) $$\underline{\underline{ty_0}} + \binom{t+1}{3}\delta^2 y_0^* + \underline{\underline{sy_1}} + \binom{s+1}{3}\delta^2 y_1^*,$$

$$\delta^2 y_0^* = \delta^2 y_0 - c\delta^4 y_0$$

となる。(11) で══の項は線型補間(比例部分)である。このように $\delta^4 y_0$ を $\delta^2 y_0$ にくりこんで、みかけ上次数の低い補間式で、高次のと同じ程度の精度をうる工夫を、くりこみ (throwback) とよぶ。公式 (11)は Comrie によるものである。定数 $-c$ は値域の中央値 $-7/40$ でもよいが、Comrie は t が一様に現われるとして、積分による平均値 -0.184 を推薦している。いずれにしても、くりこみによつて新たに生ずる誤差は、 $\binom{t+1}{3}$ という項がさらにかかつていることを考慮すると、

$$\frac{1}{800}\max[|\delta^4 y_0|, |\delta^4 y_1|]$$

以下なので、$\delta^4 y$ が計算の最小単位の400倍以下なら無視してさしつかえない。

函数表には、値の横に δ^{2*} を計算して、印刷しておくと便利である。

例

	$J_2(x)$	δ^{2*}	δ^2	δ^4
11.6	0.00461559	+15622	15565	−317
11.7	−0.01854910	+37729	37632	−517

から $J_2(11.62)$ の値を補間する。(右側は参考資料でいまは不要)

$s=0.2$, $t=0.8$ とすると

$$\binom{s+1}{3} = -0.032, \quad \binom{t+1}{3} = -0.048$$

表　差

$$
\begin{array}{rl}
0.00461559 & \\
-0.00463294 & \leftarrow -0.02316469 \times 0.2 \\
- \quad 1207 & \leftarrow \binom{s+1}{3}\delta^2 f_1^* \\
- \quad 750 & \leftarrow \binom{t+1}{3}\delta^2 f_0^* \\
\hline
-0.00003692 &
\end{array}
$$

したがつて $J_2(x)$ のこの近くの零点はほぼ

$$11.62 - \frac{-0.00003692}{-0.23} = 11.61984$$

と推定される（これは末位まで完全に正しい）。

演習問題 1.3. 上記の例で補間による誤差、およびくりこみによる誤差を評価せよ（参考までに δ^2, δ^4 の生の値を示しておいた）。

II. 数値積分

2.1. 数値微分法

数値微分法とは、函数表の形で与えられている函数の微分係数を補間多項式の微分係数によつて近似する手法である。

$x_0, x_1, \ldots, x_n$ における函数 $f(x)$ の値 $y_0, y_1, \ldots, y_n$ に対して、補間多項式 $P(x)$ は、I 章でのべたように

(1)　$$f(x) - P(x) = L(x)g(x)$$

$$L(x) := (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

$$g(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

（ξ は $x_0, \cdot\cdot, x_n$ を含む最小区間内のある値）

をみたすから、x_j での微分係数の誤差は、

$$(2) \qquad f'(x_j) - P'(x_j) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)L'(x_j),$$

$$L'(x_j) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} (x_j - x_i)$$

となる。したがつて f が 'おとなしい' 函数で、$f^{(n)}(x)$ が n とともにそう急激に増すことがなければ（この条件は、$f(x)$ が激しく振動したり、問題の区間の近くに特異点があつたりはしないことを含む）、このような操作で、微分係数のかなりよい近似値がえられる。

$x_0, x_1, \ldots$ が刻み幅 h の等間隔分点のときには、各種の等間隔補間公式を微分すればよい。(2) の右辺での $L'(x_j)$ の項は区間の中央あたりで最小になるから、区間の端近くで誤差の少ない Stirling の公式を微分するのが、全体的にみて有利であろうと予想される。中心差分

$$\delta f(x) := f(x+\tfrac{h}{2}) - f(x-\tfrac{h}{2})$$

と平均演算

$$\mu f(x) := \tfrac{1}{2}[f(x+\tfrac{h}{2}) + f(x-\tfrac{h}{2})]$$

を使えば、

$$\Delta^{2k} y_{-k} = \delta^{2k} y_0 ,$$

$$\mu y_0 = (\Delta y_{-1} + \Delta y_0)/2 = (y_1 - y_{-1})/2$$

である。前章 1.3.の記号を使い

$$\binom{s+j-1}{2j} + \binom{s+j}{2j} = \frac{s}{j}\binom{s+j-1}{2j-1} , \quad (j = 1,2,\ldots)$$

を利用すると、 Stirling の公式は

$$P(s) = y_0 + \sum_{j=1}^{k} \binom{s+j-1}{2j-1} [\mu\delta^{2j-1} y_0 + \frac{s}{2j}\delta^{2j} y_0]$$

となる。これを s=0 においてsで微分すると、 $\frac{s}{2j}\binom{s+j-1}{2j-1}$ の項は s^2 を

含むため 0 となり、

$$\left.\frac{dP(s)}{ds}\right|_{s=0} = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \mu\delta^{2j-1} y_0 \frac{[(j-1)!]^2}{(2j-1)!}$$

となる。 $s = (x-x_0)/h$ だから、 x での微分に直せば

$$(3) \quad f'(x_0) \doteqdot \frac{dp}{ds}(x_0) = \frac{1}{h}[\mu\delta y_0 - \frac{1}{6}\mu\delta^3 y_0 + \frac{1}{30}\mu\delta^5 y_0 - \frac{1}{140}\mu\delta^7 y_0 + \cdots]$$

となる。計算に便利なように、いろいろ変形もできる。

また2次微分係数は、 Stirling の公式から

$$f''(x_0) \doteqdot \frac{1}{h^2}[\delta^2 y_0 - \frac{1}{12}\delta^4 y_0 + \cdots \quad]$$

となる。もつと高次の微分係数も求められる。

数値微分は、右辺に $1/h$ の項があるので、h をあまり小さくとりすぎると、丸めの誤差が大きく影響してくる。したがつて、誤差を (2) でみつもりつつ、ある程度 h を大きくして計算するか、あるいは、h をかえていくつかの計算をし、誤差の主要項が消されるようにくみ合わせて、 $h=0$ に対する値を補外するほうがよい。 $h=1$ に対するある刻み h に対する値 z_h と、 qh $(0<q<1$, たとえば $q=1/2)$ にした値 z_{qh} とがあれば、

(4)
$$\frac{z_q - q^2 z_{qh}}{1 - q^2}$$

を作ると、誤差は h^4 のオーダーになる。

演習問題 2.1. （当然の結果であるが） $q=1/2$ として (4)を適用したものは、はじめから刻み幅を $h/2, k=2$ として公式 (3) を使つたのと同じであることをたしかめよ。

2.2. 等間隔数値積分

同じことであるから、はじめは一般化して、正規型の常微分方程式（初期条件は適当に定める）

(5)
$$y' = f(x, y)$$

を解くことを考える。(5) の解 $y=y(x)$ を、刻み幅 h の分点 $x_n = x_0+nh$ での近似値 y_n の表によつて表現する。 $x_m, x_{m-1}, \ldots, x_{m-k+1}$ における $y_m, y_{m-1}, \ldots, y_{m-k+1}$ （k は一定とする）に対して、x_j で値

$$y_j' := f(x_j, y_j) \quad (j = m-k+1, \ldots, m-1, m)$$

をとる補間多項式 $P(x)$ を作り、

$$y_n - y_\ell = \int_{x_\ell}^{x_n} y' \, dx = \int_{x_\ell}^{x_n} P(x) \, dx$$

として y_n を求める。 $n>m$ の場合には、多段階法の予測子にあたり、 $n \leqq m$ の場合には修正子にあたる。とくに(5) の右辺がy を含まない(本来の数値積分法の)ときには、 $n \leqq m$ であつてもそのまま計算できる。

名	ℓ	n	
Adams-Bashforth	m	m + 1	予測子
Adams-Moulton	m - 1	m	修正子
Nyström	m - 1	m + 1	予測子
Milne-Simpson	m - 2	m	修正子
Newton-Cotes	m - k + 1	m	数値積分

常微分方程式の数値積分については、高田教授のセミナーで論ぜられると思うので、以下では本来の数値積分だけを扱う。

記号をかえて、x_m を x_0, x_{m-k+1} を x_{-k} とし(したがつてk は上記のk より1つへる), $s := (x-x_0)/h$ とすれば、 $x_0, x_{-1}, \ldots, x_{-k}$ に対する補間多項式は、 Newton の後退公式を変形して

$$(6) \qquad P(s) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{-s}{j} \nabla^j y_0$$

と表わされる。ただし $\nabla^j y_0 = \Delta^j y_{-j}$ は後退差分で、

$$\nabla^0 y_j := y_j, \quad \nabla^1 y_n := \nabla y_n := y_n - y_{n-1}, \quad \nabla^j y_n := \nabla(\nabla^{j-1} y_n)$$

で定義される。

(6) を積分すれば、$a=x_{-k}$, $b=x_0$ に対して

(7) $$\int_a^b f(x)\,dx \doteqdot h\int_{-k}^0 P(s)\,ds = h\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\nabla^j y_0\int_{-k}^0 \binom{-s}{j}\,ds$$

$$= h\sum_{j=0}^{k} c_j\nabla^j y_0 \ ;$$

(8) $$c_j = (-1)^j\int_{-k}^0 \binom{-s}{j}\,ds$$

となる。(k は一応固定しておく) c_j は (8) で順次計算できるが、まとめて求めるならば、母函数を使うとよい。すなわち

$$g(t) := \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^j = \sum_{j=0}^{\infty}\int_{-k}^0 \binom{-s}{j}(-t)^j\,ds$$

$$= \int_{-k}^0 \sum_{j=0}^{\infty}\binom{-s}{j}(-t)^j\,ds = \int_{-k}^0 (1-t)^{-s}ds$$

$$= \left.\frac{-(1-t)^{-s}}{\log(1-t)}\right|_{s=-k}^{0} = \frac{(1-t)^k-1}{\log(1-t)}$$

(この項別積分は、$|t| < 1$ ならば問題ない)。したがつて $g(t)$ に

$$-\frac{\log(1-t)}{t} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t^2 + \ldots$$

をかけることにより、漸化式

(9) $$c_n + \frac{1}{2}c_{n-1} + \frac{1}{3}c_{n-2} + \ldots + \frac{1}{n+1}c_0 = (-1)^n\binom{k}{n+1}$$

をうる。ただし (9)の右辺は、$n+1 > k$ のときは 0と解釈する。

例1 $k = 1$ のときには、 $c_0 = 1$, $c_1 = -1/2$ で、(7)は

$$h(y_0 - \frac{1}{2}\nabla y_0) = \frac{1}{2}(y_0 + y_{-1})$$

これは台形公式（ f を線型補間して、台形の面積で近似 ）である。

例2 $k = 2$ のときには、 $c_0 = 2$, $c_1 = -2$, $c_2 = 1/3$で (7)は

$$h(2y_0 - 2\nabla y_0 + \frac{1}{3}\nabla^2 y_0) = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_{-1} + y_{-2})$$

となる。これは Simpson の公式である。

例3 $k = 6$ のときには、正しくは

$$c_0=6,\ c_1=-18,\ c_2=27,\ c_3=-24,\ c_4=\frac{123}{10},\ c_5=-\frac{33}{10},\ c_6=\frac{41}{140}$$

になるが、c_6 を $\frac{1}{140}$ だけふやして $c_6^* := \frac{42}{140} = \frac{3}{10}$ に直すと全部 $\frac{3}{10}$

の整数倍になり、まとめてkが大きいわりには係数が簡単な公式

$$\frac{3}{10}h[y_0 + 5y_{-1} + y_{-2} + 6y_{-3} + y_{-4} + 5y_{-5} + y_{-6}]$$

をうる。これを Weddle の公式という。

演習問題 2.2 $k = 3$ に対する Newton-Cotes の公式を求めよ。（答は Simpson の $\frac{3}{8}$ 公式）

以上の計算法は手計算では迂遠であるが、(9)によつて計算機に自動的に公式を作らせる可能性がある。

上記の公式の打ち切り誤差は、1.1の公式 (3)から評価される（なお2.4参照）。

2.3 Gaues 型の積分公式

前節のNewton-Cotes の公式は、等間隔に与えられた分点 x_i での値 y_i の重みつき平均

$$\sum w_i y_i$$

によつて定積分を近似するものであるが、分点が等間隔という制限を廃して、次のような公式を考えることができる。

1°. 重み w_i を等しくとる（未知数は x_i ）。

2°. 重み w_i 分点 x_i をすべて変数とする。

いずれも、できるだけ高次の多項式まで正しい答がでる，という条件で未知数を定める。

1° の方法は、有限区間の場合 Čebyšev (Tchebyshef) の公式として知られている。ただしこの公式は小区間の数k が $\leqq 7$, および $k=9$ 以外のときには、（分点を与える代数方程式が虚根をもつので），求めることができない。

2° の方法は Gauss 型の公式とよばれる。少し一般化して、重み $\varphi(x)$ をかけた積分を考え、

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \tag{10}$$

（区間は無限区間でもよい）

ができるだけ高い次数の多項式 $f(x_i)$ についてまで、正確に成立するように w_i, x_i を定めよう。未知数は 2n 個あるから、(2n-1) 次の多項式まで (10) が成立するようにできるはずである。

$$L(x) := (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n)$$

とすれば、(10) は $L(x)$, $xL(x)$, $\dots$, $x^{n-1}L(x)$ についても成立するから、

$$\int_a^b \varphi(x)L(x)x^r dx = 0, \qquad (r = 0,1,\dots,n-1).$$

すなわち $L(x)$ は、重み $\varphi(x)$ に対して x^r, $(0 \leqq r \leqq n-1)$ と直交する n 次多項式でなければならない。

逆にそうならば、高々 $(2n-1)$ 次の多項式 $f(x)$ に対して、

$f(x) = q(x)L(x) + g(x)$, $(q, g$ の次数 $\leqq n-1)$ と書くと、

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)g(x)\,dx$$

だから、上記のような直交条件をみたす n 次多項式 $L(x)$ の零点を $x_1, \dots, x_n$ とし、

$$\int_a^b \varphi(x)x^r\,dx = \sum_{i=1}^n w_i x_i^r, \qquad (r = 0,1,\dots,n-1)$$

によつて w_i を定めれば、所要の条件がみたされる。

例 (a) 区間が $[-1,1]$ で $\varphi(x) \equiv 1$ のときには、$L(x)$ は Legendre の多式

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$$

でよい。したがつて分点は $P_n(x)$ の零点となる。これが本来のGauss の積分公式である。

(b) 区間が $[0,\infty)$ で $\varphi(x) \equiv e^{-x}$ のときには、$L(x)$ は Laguerre の多項式

$$L_n(x) := e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

とすればよい。

(c)　区間が $(-\infty,\infty)$ で $\varphi(x)\equiv e^{-x^2}$ のときには、 $L(x)$ は Hermite の多項式

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

にとればよい。

これらの多項式の零点と重み w_i は相当大きな値まで精密に計算されて表になつている。（文献参照）

(d)　区間が $[-1,1]$ で $\varphi(x)\equiv(1-x^2)^{-1/2}$ のときには、 $L(x)$ は Čebyšev の多項式

$$T_n(x) := 2^{-(n-1)}\cos\ (n\ \arccos\ x)$$

が条件をみたし、分点は

$$x_i := \cos[(2i-1)\pi/2n]$$

である。重みはすべて相等しく

$$w_i := \pi/n$$

である。（ただしこれを前出の Čebyšev の積分公式と混同しないように）

実用上の注意　1°　函数値を等間隔の函数表から補間して求める場合には、Gauss 型の積分公式は必らずしも有利ではない。しかし計算機でそのつど函数値を計算する場合には、刻みが等間隔というのはたいした利点ではなく、Gauss 型の積分公式が威力を発揮する。

2°　無限区間の場合、上記の公式は被積分函数が $e^{-x}L_n(x)$ とか $e^{-x^2}H_n(x)$ で十分よく近似できることを暗黙の仮定としているから、むやみに適用してもよい結果はえられない。しかし e^{-x} や e^{-x^2} はきわめて早く0に近づくので、$|x|$ が大きい場合に多項式とずれるような函数に対しては、むしろ意外なくらい

よい結果がでることが多い。たとえば

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos x\ dx,\ \int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin x}{x}\ dx$$

などは Laguerre の函数の零点を分点として計算してみたところ、きわめてよい答が求められた。

3° 区間の端（あるいはその近く）に特異点があり、n が大きいときの $|f^{(n)}(x)|$ が大きくなる場合には、高次の公式 (Newton-CotesやGarss で）を適用してもよい結果がえられず、かえつて結果が悪くなることさえある。このような場合には、しやにむに高次の公式を適用することは禁物で、区間を細分したり、特異点を除いたりする工夫をすべきである。

2.4 Simpson の公式の反覆適用

長い区間にわたる積分の計算は、区間を細分して各小区間に台形公式や Simpson の公式を適用するのが普通である。記号をかえて区間 $[a,b]$ を2N 等分し、$h := (b-a)/2N,\ x_0 := a,\ x_k := x_0 + kh,\ (x_{2N}=b)$とすると、Simpson の公式は

$$(11)\qquad \int_a^b f(x)\ dx \doteqdot \frac{h}{3}[f(x_0) + 4\sum_{k=1}^{N} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{N} f(x_{2k}) - f(x_{2N})]$$

となる（右辺は計算機で逐次計算してゆくのに便利なようにわざと変形してある）。

一区間での誤差は

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)\ dx - \frac{h}{3}[f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})]$$

$$= \frac{-1}{90} f^{(4)}(\xi_k) h^5, \qquad (x_{2k} < \xi_k < x_{2k+2})$$

である。したがつて全体の和は

$$(12) \qquad \int_a^b f(x)\,dx - [\,(11)\text{の右辺}\,] = -\frac{h^4}{180} \sum_{k=0}^{N-1} f^{(4)}(\xi_k)(x_{2k+2} - x_{2k})$$

となる。もしNがきわめて大きければ、 (12) の右辺の和は、 $f^{(4)}(x)$ に対する分割の積和（ Darboux 和）であるから、 $f^{(4)}(x)$ の Riemann 積分で近似できる。したがつて (12)の右辺は近似的に

$$(13) \qquad -\frac{h^4}{180}[f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)]$$

で与えられる。もちろん (13) は誤差の主要項である。 Euler-Maclaurin の公式を使つてhのべき級数で表わすと、この次に h^6 の項が現われる。

この事実から次のようなことがわかる。

1° $f^{(3)}(x)$ が計算できれば、 (11)の右辺に (13)の補正を加えると、精度が上げられるみこみがある。

2° 一般に誤差は h^4 に比例して減少する。ただし特別に $f^{(3)}(a)=f^{(3)}(b)$ というときには、この項が消え、 h^6 に比例することになる。

3° $f^{(3)}(b)-f^{(3)}(a)$ が0にきわめて近いときには、hをかえると (13) と次の h^6 の項とが影響してくる。両者の符号が逆のときには、ある値で誤差がきわめて小さくなり、それよりhをへらすとかえつて誤差がふえる、という現象も起こる。

このような現象がじつさいに起こることは、たとえば

$$\int_0^b \frac{dx}{1+x^2} \qquad (b \fallingdotseq 1)$$

について、森口教授の詳細な数値実験で知られている。

同様に台形公式については、次のようになる。

$$h := (b-a)/N, \quad x_0 := a, \quad x_k := x_0 + kh,$$

とするとき

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteqdot \frac{h}{2}[f(x_0) + 2\sum_{k=1}^{N} f(x_k) - f(x_N)] \quad \cdots\cdots \text{公式}$$

$$- \frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] \quad \cdots\cdots \text{誤差の主要項}$$

N が小さく（h が大きく）、$f^{(3)}$ が f' に比べて大きいときには、Simpson の公式よりも台形公式のほうがかえつて誤差が少ないこともある。

演習問題 2.3 （ IBM 西村真一郎氏による FORTRAN 演習問題の一つ）次の積分を、Nを 2, 4, 8, 16, ... とかえて Simpson の公式で計算し、何等分くらいが最適であるかしらべてみよ。

(i) $\int_1^2 x^3\,dx = 3.75$

(ii) $\int_0^1 \sin(50x)\,dx = 0.00035034$

(iii) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = 0.78539816$

Ⅲ　函数近似

3.1　函数近似概論

函数近似とは、函数を有限の手段で表現することである。具体的には有限個のパラメタを含む族Fのうちから $f(x)$ に「もつとも近い」ものを選ぶことであ

る。もつとも近い基準には、もつと大きな函数空間におけるノルムが使われる。

F が $f(x)$ を含んでいれば問題は trivial であるが、じつさいにはこれは無意味である。とくに函数計算については、F の函数が直接に計算できるもの――たとえば多項式や有理函数、まれに三角多項式など―― でなければ役にたたない。

現在までもつともよく研究されているのは、Fが線型族、すなわち有限個の基底函数の一次結合 $\sum a_i \varphi_i(x)$ で作られる場合である。多項式、三角多項式、その他の直交級数による近似などはこの場合である。ノルムが二乗平均ノルムの場合には、最小二乗近似であつて、正規直交基底から容易に求められる。ノルムが、値の差の絶対値の最大の場合は、最良近似、 Minimax 近似、ときにはČebyšev近似ともよばれるが、この場合にも以下のように理論は一応完成している。もちろん、実用上では、具体的な函数に対する近似公式をじつさいに求める手法や、最大誤差の評価とか、一意性が成立しない場合などについて、まだ問題はいろいろある。

現在理論的に興味をもたれているのは、非線型族による近似、とくに有理函数近似の一般化として、Fが線型族の要素の商の形の函数族の場合の理論である。これについてもすでにかなりの理論ができつつあるが、一方本質的な困難があることもわかつている。今回は古典的な線型最良近似の概説をのべるだけにとどめる。有理函数近似については、他日を期したいと思う。

3.2 最良近似

E をコンパクトな位相空間とし、E上の実数値連続函数全体のなす空間Cに、ノルム

$$\|f\| = \{\sup |f(x)| \quad x \in E\}$$

を入れれば、C は Banach 空間になる。有限個の $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ から生成さ

れる線型部分空間Fと $f \in C$ に対して、

$$\min\{\|f-\varphi\| \mid \varphi \in F\}$$

を与えるφをFでのfの最良近似という。以下

$$f,\ \varphi_1, \dots, \varphi_n$$

は一次独立として一般性を失わないから、そうする。

定理3.1　上記の条件の下で、Fでのf の最良近似は必らず存在する。

証明の概略　(i)　M を固定したとき、$\{(c_1,\dots,c_n) \mid \|\sum c_i\varphi_i - f\| < M\} \subset R^n$ は有界である。

(ii)　$g(c_1,\dots,c_n) = \|\sum c_i\varphi_i - f\|$　は、$c_1,\dots,c_n$ について下に半連続である。

(iii)　したがつて $g(c_1,\dots,c_n)$ は R^n 内のコンパクト集合内で最小値をじつさいにとる。（証終）

$\|f-\varphi\| = |f(x)-\varphi(x)|$ である点xをφの偏差点という。さらにこれが $= f(x)-\varphi(x)$である点 xを負偏差点、 $= -(f(x)-\varphi(x))$ である点を正偏差点とよぶ。

補題3.2　最良近似φの正偏差点、負偏差点の全体を P,N とする。このとき、$\psi \in F$で

$$P\ で\ \psi > 0, \qquad N\ で\ \psi < 0$$

である函数は存在しえない。とくに定符号の函数がFにあれば、P,N はともに空ではありえない。

補題3.3　$\{(c_1,\dots,c_n) \mid \sum c_i\varphi_i$ がf の最良近似$\} = L$ は R^n 内のコンパクトな凸集合である。

L が生成する線形空間の次元、すなわち $L \ni a_0, a_1, \dots$ をとり $\overrightarrow{a_0a_1}$, $\overrightarrow{a_0a_2}, \dots$ が一次独立とするとき、そのようなベクトルの最大個数を最良近似

の次元という。

r を定め、$E \ni x_1, \ldots, x_r$（すべて相異なる）を任意にとるとき、つねに、行列

$$\{\varphi_j(x_k)\}, \quad j = 1,\ldots,n; \quad k = 1,\ldots,r$$

の階数が r ならば、$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ の階数は少なくとも r であるという。階数が少なくとも r で、少なくとも (r+1) でないとき、階数はちようど r という。とくに階数が n のとき、$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ を完全一次独立ともいう。F の階数が少なくとも r であるための必要十分条件は、$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ の (n-r+1) 個の一次結合で互いに一次独立なものが、E 内に r 個またはそれ以上の零点をもたないことである。

例 1変数の (n-1) 次多項式（ $1, x, \ldots, x^{n-1}$ の一次結合）は 0 でない限り n 個以上の零点をもたないから、完全一次独立である。同様に三角多項式の底、 $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots$ も区間 $[0,\pi]$ で完全一次独立である。

定理 3.4 $(c_1, \ldots, c_n) \in L$ 全体にわたる族 $\left\{\sum c_i\varphi_i,\ (c_1, \ldots, c_n) \in L\right\}$ のおのおのの函数の偏差点は、共通点（共通偏差点）をもつ。$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ の階数が少なくとも r ならば、共通偏差点は少なくとも (r+1) 個ある。

定理 3.5 $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ の階数がちようど r ならば、最良近似の次元は高々 n-r である。とくに完全一次独立なら、最良近似は一意的である。

じつはある意味でこの逆も成立する。すなわち

定理 3.6 （Haar の定理）もしすべての $f \in C$ に対して F の最良近似がつねに一意的ならば、$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ は完全一次独立である。

3.5. 最良多項式近似

前項の理論をとくに 1 変数の多項式近似に応用してみる：

<u>定理3.7</u>　区間 $[a,b]$ において、多項式 $\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ が、連続函数 $f(x)$ の最良近似であるための必要十分条件は、つぎのような偏差点の族 x_0, $x_1, \ldots, x_n$ が存在することである。

(i)　$a \leqq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leqq b$.

(ii)　x_i は交互に正、負の偏差点

(iii)　$|f(x_i) - (x_i)| = \mu$　($i = 0, 1, \ldots, n$ について共通)

したがつて当然、$a \leqq x \leqq b$ で　$|f(x) - \varphi(x)| \leqq \mu$,

$f(x_i) - \varphi(x_i) = \pm(-1)^i \mu$　（ ± は全部に共通 ）

<u>例</u>　$[-1,1]$ において x^n を $(n-1)$ 次多項式で最良近似すれば、$\varphi(x) = x^n - 2^{-(n-1)} T_n(x)$　($T_n(x)$ は Čebyšev の多項式 ）である。これはこの函数が定理3.7の条件をみたすことからわかる。

じつさいに最良多項式近似を求めるには、定理3.7の性質を利用し、これをみたす $\varphi(x)$ を求める。$\pm\mu$ を μ と書きかえれば、未知数は、$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, x_0, x_1, \ldots, x_n, \mu$ の $(2n+2)$ 個であり、条件は

(1)　$$f(x_j) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_j^i = (-1)^i \mu \quad (j = 0, 1, \ldots, n)$$

(2)　$$f'(x_j) - \sum_{i=1}^{n-1} i a_i x_j^{i-1} = 0 \quad (j = 0, 1, \ldots, n)$$

の $(2n+2)$ 個である（ $f(x)$ は C^1 級と仮定する ）。もつとも多くは $x_0 = a$, $x_n = b$ であり、$j = 0, n$ では (2) は成立しないが、そのときには、x_0, x_n は既知で未知数が2個へり、ちょうど方程式の数とあう。したがつて適当な第1近似からはじめて、(1), (2) を逐次近似でとけば、最良近似が定められる。

普通には、a_i を定めて (2) から x_j を近似し、次に x_j を定めて a_i とμを (1) から求め、というように交互に逐次近似する。このための第1近似式を求める方法としては、 Taylor 展開に Čebyšev の多項式でくりこみをほどこしたもの、 Čebyšev 展開の部分和、 Čebyšev 補間、山内二郎教授の折りたたみ計算法などが使われる。—— 近年は、 Taylor 展開の係数と区間、精度などを与えると、自動的に最良多項式近似式を計算するプログラムも試作されている。このほか緩和法、凸集合を利用する Haar の方法など、いろいろの手法が研究されている。

なお三角多項式および1複素変数の(複素数値)多項式についても、ほぼ同様の理論が成立する。複素平面上のコンパクト集合E上で、 z^nを(複素係数の) (n-1) 次多項式で最良近似したときの最大誤差 m_n は、E の大きさを規定する量である：具体的にいうと、 $\lim_{n\to\infty} m_n^{1/n} = \rho$ が存在し、この値がEの超越直径、 Robin の定数、対数容量などに相等しいことが知られている。

多変数の多項式近似においては、完全一次独立ではないから、一意性は一般には成立しない。1次式に対しては、 Collatz が特別な場合に一意性を証明しているが、これは多分に1次式の特殊性がきいており、2次式以上では一意性は期待できないことを Shapiro や Rice が示している。また Rice は、 "strictly best-fit approximation" という概念を導入して、その一意性を示している。

2変数の多項式近似を基底

$$\left\{ x^p y^q \mid \ p, q \geqq 0, \quad p+q \leqq s \right\}$$

にとつて行なうと、階数は s+1 であり、共通偏差点は (s+2) 個以上ある。もし共通偏差点がちようど (s+2) 個ならば、それらは同一線分上にあり、しかもその上に交互に正、負の偏差点が並んでいることが証明される。

2変数の函数の実用例として、たとえば Bessel 函数 $J_\nu(x)$ を ν, x 2変数の函数として直接計算したいというようなものがある。最小二乗近似の形で近似多項式は求められているが、このような場合には、一意性の成立しないことを逆用して、係数がなるべく簡単になる（たとえば大きな係数は十進法ないし二進法で有限小数で表わされる）ようなものをさがすのも、実用上の一つの行き方かと思う。ただしそのような作業は case－by－case に工夫するしかなく、「一般論」を作ることは難しいであろうと思われる。

文　　献

1. 全般的なもの

P. Henrici, Elements of numerical analysis, John Wiley & Sons., 1964,

A. D. Booth, Numerical methods, Butterworths, 1955.

（宇田川銈久、中村義作訳、コロナ社、1958）

F. B. Hildebrand, Introduction to numerical analysis, Mc Graw Hill., 1956.

D. R. Hartree, Numerical analysis, Clarendon Press, 1958.

宇野利雄、電子計算機のための数値計算法，朝倉，1963

2. 補間法について

T. H. Southard, Everett's formula for bivariate interpolation and throw-back of fourth differences, MTAC 10 (1956) 216-223.

3. 数値微積分について

森口繁一、数値計算の理論と実験Ⅰ，Ⅱ　科学32（1962）

12月；33（1963）1月

山下真一郎、佐竹誠也， Gauss の数値積分公式の分点と重率の決定；
Laguerre-Gaussの ―― ； Hermite-Gauss の ――；情報処理5巻4号
（1964）；6巻4号（1965）；6巻5号（1965）

P. Henrici, Discrete variable methods in ordinary differential equations, John Wiley & Sons, 1962.

4. 函数近似の理論について

一松 信、近似式，竹内書店，1963

J.R. Rice, The approximation of functions, I – Linear theory, Addison-Wesley, 1964.

H. L. Garabedian 編 , Approximation of functions, (symposium 報告) Elsevier, 1965.

とくに容量との関係については

M. Tsuji, Potential theory in modern function theory, Maruzen, 1959, § 3.5.